UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Probe-Vorlesung
aus dem 4. Fachsemester
»Einführung in die Optimierung«:
Wie löst man
Lineare Ungleichungs-Systeme?

Lehrstuhl Wirtschaftsmathematik
Jörg Rambau

Hochschulinformationstag
2023

1. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

1.1. Bsp.:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} +1 \\ -1 \end{array} \Big] \oplus \iff \left|\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_2 = 2 \end{array}\right|$$

$$\iff \left|\begin{array}{r} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}\right|$$

Gauß-Elimination

1.2 Beob.:

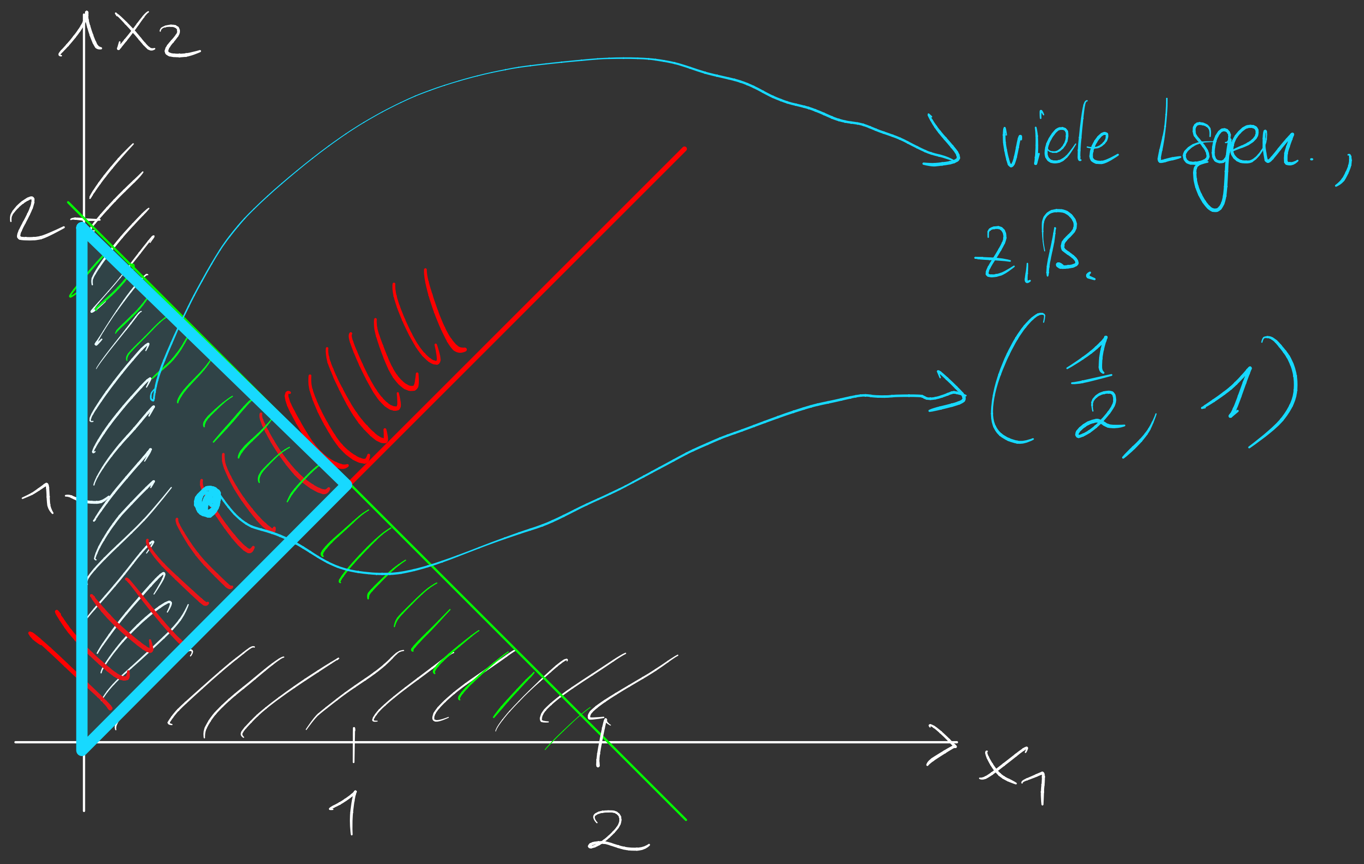
- $x_1 - x_2 = 0 \iff -(x_1 - x_2) = -0$
- $x_1 - x_2 \leq 0 \iff -(x_1 - x_2) \geq -0$

2. Lineare Ungleichungssysteme (LUS)

2.1. Bsp.:

$$
\left|\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 & \leq & 2 \\
x_1 - x_2 & \leq & 0 \\
x_1 & \geq & 0 \\
x_2 & \geq & 0
\end{array}\right|
$$

2.2. Beob.:



2.3 Algorithmus und Bsp.: Fourier-Motzkin-Elimination

Input: LUS in $x_1, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$

Output: Eine Lsg. des LUS $x_1^*, \dots, x_n^*$ oder $\emptyset$.

① Generiere (LUS_1) aus (LUS) mit nur „$\leq$":

$$(LUS_1) \quad \begin{array}{|rcl|l}
x_1 + x_2 & \leq & 2 & \alpha: 1 \\
x_1 - x_2 & \leq & 0 & \alpha: 1 \\
-x_1 & \leq & -0 & \beta: 1 \; 1 \\
-x_2 & \leq & -0 &
\end{array}$$

② Für $k=1$ bis $n-1$:

2a Färbe „$\leq$" in (LUS_k) $\begin{cases} \text{ohne } x_k & \text{gelb} \\ \text{mit pos. } x_k\text{-Koeff} & \text{grün} \\ \text{mit neg. } x_k\text{-Koeff.} & \text{rot} \end{cases}$

2b Generiere neues (LUS_{k+1}) mit „$\leq$" aus allen

- gelben „$\leq$"
- $(\alpha \cdot \text{grün} + \beta \cdot \text{rot})$ — „$\leq$", $\alpha, \beta > 0$, so dass x_k wegfällt:

$$(LUS_2) \quad \begin{array}{|rcl|}
-x_2 & \leq & 0 \\
x_2 & \leq & 2 \\
-x_2 & \leq & 0
\end{array}$$

Elimination

(3) Für $k = n$ bis 1:

(3a) Bringe (LUS_k) in die Form $\ell \leq x_k \leq r$:

$$-0 \leq x_2 \leq 2 \qquad \longrightarrow \qquad -0 \leq x_1 \leq 1$$

(3b) Falls $\ell > r$: RETURN $(\emptyset)$. Sonst:

(3c) Wähle $x_k^* \in [\ell, r]$:

$$\boxed{x_2^* = 1} \qquad \boxed{x_1^* = \frac{1}{2}}$$

(3d) Falls $k > 1$, setze x_k^* für x_k in (LUS_{k-1}) ein:

(LUS_1) mit $x_2 = 1$

$$\left|\begin{array}{rl} x_1 + 1 & \leq 2 \\ x_1 - 1 & \leq 0 \\ -x_1 & \leq 0 \\ -1 & \leq 0 \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{rl} x_1 & \leq 1 \\ x_1 & \leq 1 \\ -x_1 & \leq 0 \end{array}\right|$$

Rückwärtseinsetzen

(4) RETURN $(x_1^*, \dots, x_n^*)$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}, 1\right)}$$

2.4. Bem.:

- Beweis der Korrektheit → nächste Sitzung
- Es gibt was „Schnelleres" → spätere Sitzung
- Hausaufgabe:

HA1: Hat
$$\left|\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\le 2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &\le -1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 3 \\ x_2 + x_3 &\le 0 \end{aligned}\right|$$
eine Lsg.?

Wenn ja, geben Sie eine an!

Lust auf mehr?

→ Mathe studieren!